Vol. XIX, No 2, Diciembre (2011)
Matemáticas: 101–105

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Distorsiones de la longitud por aplicaciones conformes y convexas

Diana C. Giraldo
Universidad Autónoma de Madrid

Recibido Ago. 30, 2011 Aceptado Nov. 29, 2011

Abstract

We derive a sharp estimate for the arclength of the image of the circle $|z| = r$ under a convex univalent mapping. Our methods are different from those used by Keogh in [4].

Keywords: Univalent Functions, Distortion, Convex Functions, Baernstein´s Theorem.

MSC(2000): 30C45

Resumen

Deduciremos una estimación precisa de la longitud de arco de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ por una aplicación univalente convexa. Los métodos utilizados son diferentes a aquellos usados por Keogh en [4].

Palabras y frases claves: Funciones Univalentes, Distorsión, Funciones Convexas, Teorema de Baernstein.

1 Introducción

La teoría de las funciones univalentes comenzó a desarrollarse alrededor del año 1900 y, en la actualidad, sigue siendo un campo activo de investigación. Muchos de los resultados en esta teoría, se plantean como problemas extremales: maximizar el módulo de los coeficientes de Taylor, derivadas, áreas, longitudes y medias integrales asociadas con las funciones univalentes. Aún quedan muchos problemas abiertos.

Esta nota está dedicada a ofrecer una nueva prueba para la resolución de uno de estos problemas extremales; concretamente, el problema de longitud de arco de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ bajo una aplicación univalente convexa. Este resultado fue publicado en un trabajo de Keogh [4] que no parece estar muy citado en la literatura. No obstante, como se ha mencionado, nuestros métodos son diferentes de los suyos: utilizamos un resultado importante de Baernstein y obtenemos una prueba más corta que aquella que se muestra en [4]. Se mostrarán todos los detalles, para hacer accesible el contenido de este trabajo a las personas no especializadas en el área.

Definición 1. *Una función f analítica en un dominio D del plano complejo $\mathbb{C}$, se dice* ***univalente*** *en D, si $f(z_1) \neq f(z_2)$ para todo par de puntos $z_1, z_2 \in D$ con $z_1 \neq z_2$.*

Definición 2. *La clase de funciones $\mathcal{S}$ está formada por las funciones analíticas y univalentes en el disco unidad $\mathbb{D}$, normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.*

Cada $f \in \mathcal{S}$ tiene una expansión en serie de Taylor de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad |z| < 1.$$

La función identidad $f(z) = z$ pertenece a $\mathcal{S}$. Otros ejemplos de funciones en esta clase son $\ell(z) = z + z^2 + \dots = z(1-z)^{-1}$, función de la que hablaremos más adelante; también la *función de Koebe*, definida por $k(z) = z(1-z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$ que juega un papel importante como función extremal, para una gran cantidad de problemas extremales en la clase $\mathcal{S}$.

El siguiente teorema debido a Koebe, es fundamental en la teoría de funciones univalentes. Véase [3, p. 35].

Teorema 1. *Para toda $f \in \mathcal{S}$ y $|z| = r < 1$, se cumple:*

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}. \tag{1}$$

La igualdad ocurre si y sólo si f es una rotación adecuada de la función de Koebe. Es decir, $f(z) = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z)$, para $\theta = \theta(z)$ convenientemente elegido.

Dada una función analítica f en $\mathbb{D}$, se define su **media integral** de orden p, para $0 < p < \infty$, como

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}.$$

Calculando la longitud de arco $L_r(f)$ de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ bajo la aplicación $f \in \mathcal{S}$, resulta

$$L_r(f) = r \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta = 2\pi M_1(r, f').$$

Usando la siguiente estimación debida a Littlewood (ver también [5]) para las medias integrales de orden uno

$$M_1(r, f) \leq \frac{r}{1-r}, \quad 0 \leq r < 1, \tag{2}$$

y (1), en [3, p. 39] se demuestra la estimación básica

$$L_r(f) \leq \frac{2\pi r(1+r)}{(1-r)^2}, \quad 0 \leq r < 1. \tag{3}$$

En su importante trabajo [1], usando técnicas de simetrización, Baernstein mejora (2) y obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2. *Para toda* $f \in \mathcal{S}$, $p > 0$ *y* $r = |z| \in [0, 1)$, *se tiene* $M_p(r, f) \leq M_p(r, k)$.

Tomando $p = 1$, se tiene

$$M_1(r, f) \leq \frac{r}{1 - r^2} = M_1(r, k). \tag{4}$$

Aplicando (4) en lugar de (2) en la prueba [3, p. 39], se consigue mejorar (3) como sigue:

Teorema 3. *Para toda* $f \in \mathcal{S}$,

$$L_r(f) \leq \frac{2\pi r}{(1 - r)^2}, \quad 0 \leq r < 1. \tag{5}$$

No se conoce todavía si (5) es precisa en general pero se intuye que no. Sin embargo, veremos que para funciones más especiales, como las convexas, sí se puede obtener una estimación mejor y precisa para $L_r(f)$.

Definición 3. *Una función* ***convexa*** *es una aplicación univalente de* $\mathbb{D}$ *sobre un dominio convexo. La subclase de* $\mathcal{S}$ *que consiste de todas las funciones convexas es denotada por* $\mathcal{C}$.

Una función convexa también envía cualquier disco $\{z : |z| < r\}$ con $r < 1$, a un dominio convexo. Note que la función de Koebe no es convexa pero se puede ver que la función $\ell(z) = z(1 - z)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ sí está en $\mathcal{C}$ ya que envía $\mathbb{D}$ sobre el semiplano $Re\{w\} > -\frac{1}{2}$ y es una transformación de Möbius. Además, cumple la igualdad $z\ell'(z) = k(z)$. La función ℓ es extremal para muchos problemas extremales en esta subclase.

Según el Teorema de Alexander ([3, pag. 43]): Si $f \in \mathcal{C}$ entonces $zf'(z) \in \mathcal{S}$.

2 Teorema principal

Ahora tenemos todas las herramientas necesarias para probar nuestro resultado principal.

Teorema 4. *Sea* $0 < r < 1$ *y* $f \in \mathcal{C}$. *Entonces,*

$$L_r(f) \leq \frac{2\pi r}{1 - r^2}.$$

La igualdad se alcanza por la función $\ell(z) = z(1 - z)^{-1}$, $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Como $f \in \mathcal{C}$, por el Teorema de Alexander se tiene que la función $F(z) = zf'(z) \in \mathcal{S}$. Luego, aplicando (4) a F se tiene

$$M_1(r, F) \leq M_1(r, k) = \frac{r}{1 - r^2}. \tag{6}$$

Puesto que $L_r(f) = 2\pi r M_1(r, f')$, aplicando (6) tenemos:

$$\begin{aligned} L_r(f) &= r\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|d\theta = \int_0^{2\pi} |re^{i\theta}f'(re^{i\theta})|d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |zf'(z)|d\theta = 2\pi M_1(r, F) \\ &\leq 2\pi M_1(r, k) = \frac{2\pi r}{1-r^2}. \end{aligned}$$

Ahora, tomando $f = \ell$ y teniendo en cuenta la igualdad $z\ell'(z) = k(z)$, obtenemos $L_r(\ell) = \frac{2\pi r}{1-r^2}$. □

Definición 4. *Una función f analítica en $\mathbb{D}$, se dice* ***cercana a convexa*** *si para todo $z \in \mathbb{D}$, existe una función convexa g tal que*

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0.$$

Denotamos por $\mathcal{K}$ la clase de funciones cercanas a convexas normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Cabe observar que $\mathcal{C} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$. La primera inclusión es obvia tomando $g = f$ en la definición 4.

En 1964, Duren en [2] probó un resultado relacionado para la clase $\mathcal{K}$: $L_r(f) \leq L_r(k)$. Pero se puede ver, ahora que ya tenemos a nuestra disposición otra desigualdad de Baernstein para las derivadas $M_1(r, f') \leq M_1(r, k')$, véase [3, p. 229], que el teorema de Duren se sigue directamente. Cuando $f \in \mathcal{C}$ la estimación de Keogh [4] es mejor, pero no se puede aplicar a ninguna $f \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{C}$; por tanto, el resultado de Duren representa una aportación importante. Cabe comentar que el valor exacto de $L_r(k)$ es muy difícil de calcular.

Agradecimientos

Los contenidos aquí presentados, hacen parte de mi trabajo de doctorado en la Universidad Autónoma de Madrid dirigido por el profesor Dragan Vukotić, a quien agradezco por todos sus comentarios sobre este artículo, que ha sido parcialmente financiado por el proyecto MTM2009-14694-C02-01 de España, dirigido por el mismo profesor. Quiero agradecer también, a la profesora María José Martín, por las discusiones y comentarios realizados que ayudaron a la realización de este trabajo.

Referencias

[1] Baernstein, A.: Integral means, univalent functions and circular symmetrization, Acta Math., 133(1974), pp. 139-169.

[2] Duren, P. L.: An arclength problem for close to convex functions, Journal London Math. Soc., 39(1964), pp. 757-761.

[3] Duren, P. L.: Univalent Functions, Springer-Verlag, Nueva York, 1983.

[4] Keogh, F. R.: Some inequalities for convex and star-shaped domains, Journal London Math. Soc., 29(1954), pp. 121-123.

[5] Littlewood, J. E.: On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc., 23(1925), pp. 481-519.

Dirección del autor
Diana C. Giraldo — Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid - España.
e-mail: `dianacarolina.giraldo@uam.es`